Roll No. .....

E–3670

B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Third

(Mechanics)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* questions from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) एक दण्ड जिसका गुरुत्व केन्द्र उसे a और b दो भागों में विभाजित करता है, एक चिकने गोले के भीतर रखी हुई है। दर्शाइये कि यदि सन्तुलित अवस्था में क्षैतिज से उसका झुकाव θ है और गोले के केन्द्र पर दण्ड 2α कोण अन्तरित करती है, तो :

$$\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$$

A beam whose centre of gravity divides it into two portions a and b, is placed inside a smooth sphere. Show that, if θ be its inclination to the horizon in the position of equilibrium and 2α be the angle subtended by the beam at the centre of the sphere, then :

$$\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$$

(ब) छः समान भारी छड़ों के सिरों को मुक्त से जोड़कर बने एक समषट्भुज ABCDEF को बिन्दु A द्वारा लटकाया गया है तथा उसे विकृति से दो हल्के छड़ BF तथा CE बचाते हैं। सिद्ध कीजिए कि इन छड़ों का दबाव $\frac{5\sqrt{3}}{2}W$ तथा $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ हैं, जहाँ इनमें से प्रत्येक छड़ का भार W है।

Six equal heavy rods, freely hinged at the ends, form a regular hexagon ABCDEF, which hung up by the corner A, is kept from altering its shape by two light rods BF and CE. Prove that the thrusts in these rods are $\frac{5\sqrt{3}}{2}W$ and $\frac{\sqrt{3}}{2}W$, where W is the weight of each rod.

(स) लम्बाई l के एक समांग चैन को समान क्षैतिज रेखा में दो बिन्दुओं A तथा B से इस प्रकार लटकाया गया है कि प्रत्येक अन्तस्थ तनाव निम्नतम बिन्दु के तनाव का n गुना है। दर्शाइये कि विस्तृति AB अवश्य ही $\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$ होनी चाहिये।

A uniform chain of length l, is to be suspended from two points A and B, in the same horizontal line so that the either terminal tension is n times that at the lowest point. Show that the span AB must be :

$$\frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \log\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) दो बल P तथा Q सरल रेखाओं के अनुदिश क्रिया करते हैं जिनके समीकरण क्रमशः $y = x\tan\alpha,\ z = c$ और $y = -x\tan\alpha,\ z = -c$ हैं। दर्शाइये कि उनका केन्द्रीय अक्ष सरल रेखा :

$$y = x\frac{P-Q}{P+Q}\tan\alpha$$

तथा $$\frac{z}{c} = \frac{P^2-Q^2}{P^2+2PQ\cos 2\alpha+Q^2}$$

पर स्थित है।

Two forces P and Q act along the straight lines whose equations are $y = x \tan \alpha$, $z = c$ and $y = -x \tan \alpha$, $z = -c$ respectively. Show that their central axis lies on the straight line :

$$y = x\frac{P-Q}{P+Q}\tan\alpha$$

and $$\frac{z}{c} = \frac{P^2-Q^2}{P^2+2PQ\cos 2\alpha+Q^2}.$$

(ब) निम्नलिखित को समझाइए :

(i) प्वाइंसाट का केन्द्रीय अक्ष

(ii) शून्य समतल

(iii) शून्य बिन्दु

Explain the following :

(i) Poinsot's central axis

(ii) Null plane

(iii) Null point

(स) रेखा :

$$\frac{x-f}{l}=\frac{y-g}{m}=\frac{z-h}{n}$$

के संयुग्मी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

To find the equation of conjugate line of the line :

$$\frac{x-f}{l}=\frac{y-g}{m}=\frac{z-h}{n}.$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप्य पथ एक परवलय होता है।

Prove that projectile path is a parabola.

(ब) किसी कण के त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग λr तथा $\mu\theta$ हैं। बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि उसके त्रिज्य और अनुप्रस्थ त्वरण क्रमशः $\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}$ और $\mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$ हैं।

The velocities of a particle along and perpendicular to the radius from a fixed origin are λr and $\mu\theta$; find the path and show that the acceleration along and perpendicular to the radius vector, are $\lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$ and $\mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$.

(स) एक प्रत्यास्थ डोर, जिसका ऊपर का सिरा स्थिर है, के नीचे के सिरों पर दो पिण्ड़ M तथा M′ बाँध दिये गये हैं और विराम में लटक रहे हैं, M′ गिर जाता है; दर्शाइये कि t समय पश्चात् डोर के ऊपर के सिरे से M की दूरी है :

$$a + b + c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}.t\right)$$

जहाँ a डोर की प्राकृतिक लम्बाई है, b तथा c विस्तार हैं जबकि डोर से क्रमशः M तथा M′ बँधे हैं।

Two bodies M and M′ are attached to the lower end of an elastic string whose upper end is fixed and are lying at rest, M′ falls off; show that the distance of M from the upper end of the string at time t is :

$$a + b + c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}.t\right)$$

where a is unstretched length of the string; b and c the distances by which it would be extended when supporting M and M′ respectively.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) स्पर्शीय तथा अभिलांबिक वेग व त्वरण का सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

Derive formula for tangential and normal velocity and acceleration.

(ब) यदि ग्रह को अपने कक्ष, मान लो वृत्ताकार में अचानक रोक दिया जाये, तो दर्शाइये कि यह सूर्य में समय, जो ग्रह के परिक्रमण काल का $\frac{\sqrt{2}}{8}$ गुना है, में गिर जायेगा।

If a planet were suddenly stopped in its orbit supposed circular, show that it would fall into the sum in a time which is $\frac{\sqrt{2}}{8}$ times the period of planet's revolution.

(स) एक कण ऊर्ध्वाधर समतल में एक दिये हुए रुक्ष वक्र के अन्तर्गत नीचे की ओर खिसकता (अर्थात् नीचे की ओर गति करता है), गति ज्ञात कीजिए।

A particle slides down a rough curve in a vertical plane under gravity, to discuss the motion.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) एक कण आकाश में अचर गुरुत्वाकर्षण के प्रभाव में ऐसे माध्यम में गति करता है जिसके प्रतिरोधी बल इसके वेग के समानुपातिक हैं। कण की गति विवेचना कीजिए।

A particles falling under gravity (supposed constant) in a medium whose resistance varies as the velocity. Discuss the motion of the particle.

(ब) ध्रुवीय निर्देशांकों (गोलीय निर्देशांक) के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

To find acceleration of a particle in terms of polar coordinates (spherical coordinates).

(स) तरल की एक गोलाकार बूँद वाष्प में गिरते हुए संघनन द्वारा c की अचर दर से द्रव्यमान प्राप्त करती है। दर्शाइये कि विराम में गिरते हुए t समय बाद इसका वेग है :

$$\frac{1}{2}gt\left[1+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+ct}\right]$$

जहाँ M बूँद का प्रारम्भिक द्रव्यमान है।

A spherical drop of liquid falling freely in a vapour acquires mass by condensation at a constant rate c. Show that the velocity after falling from rest in time t is :

$$\frac{1}{2}gt\left[1+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+ct}\right]$$

where M is the initial mass of the drop.